益阳市2024~2025学年度初中学科素养与创新能力大赛
数学

注意事项：

1．本试卷包括试题卷和答题卡两部分；试题卷包括选择题、填空题和解答题三部分，共6页，时量120分钟，满分120分．

2．答题前，考生务必将自己的姓名、考号等填写在本试题卷和答题卡指定位置．请按答题卡的要求在答题卡上作答，在本试题卷和草稿纸上作答无效．

3．考试结束后，将本试题卷和答题卡一并交回．

试题卷

一、选择题：本题共10小题，每小题3分，共30分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的．

1．下列运算正确的是（　）

A. 3xy-xy=2　　B. $(-3x)^2 = 6x^2$

C. $2x^6 \div x^2 = 2x^3$　　D. $(-x-y)(x-y) = -x^2 + y^2$

2．设a, b, c的平均数为M, a和b的平均数为N, N和c的平均数为P，若M>P，则（　）

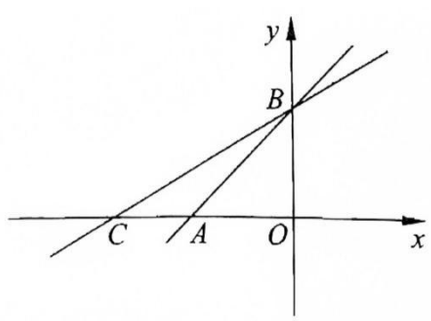
A. a+b>2c　　B. a+b<2c　　C. a+b>c　　D. a+b<c

3．若a+b=10　$a^3 + b^3 = 280$，则$a^2 + b^2 =$（　　）

A.28　　B. 44　　C.52　　D. 64

4．如图，一次函数$y = x + \sqrt{3}$的图象与x轴、y轴分别交于点A, B，将直线AB绕点B顺时针旋转15°交x轴于点C，则线段AC的长为（　）

A.1　　B. $2-\sqrt{3}$　　C. $3-\sqrt{3}$　　D. $\sqrt{3}$

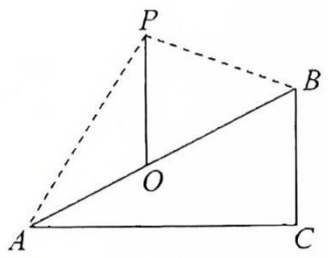


5．已知OA=OB=OC=1 $AB=\sqrt{2}AC=\sqrt{3}$，则∠OBC=(　　)

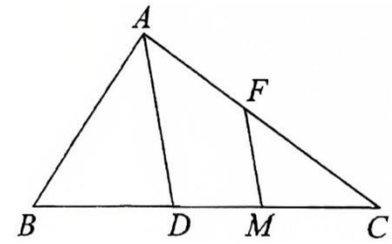
A.60°　　B.75°　　C.30°或60°　　D.15°或75°

6．如图，某公园内有一斜坡AB，坡度i=1-$\sqrt{3}$, AB=60米，斜坡AB上有一古树OP，某游人在斜坡起点A处看古树树顶P的仰角为60°，在斜坡终点B 处看古树树顶P的仰角为$15°$，则古树OP的高为（　）米

A. $60-20\sqrt{3}$　　B. 30　　C. $60\sqrt{3}-60$　　D. $30\sqrt{3}$



（ 第6题）



（第7题）

7．如图， ΔABC中， AB=5 AC=7，M是BC上一点，且BM=2CM, AD平分＜BAC，过M作MF∥AD交AC于F，则FC=())1

A. 3　　B. $\frac{7}{2}$　　C. 4　　D. $\frac{9}{2}$

8．已知点$A(x_1, y_1)$在直线y=x+2上，点$B(x_2, y_2)C(x_3, y_3)$在抛物线$y=x^2-2x-2$上，若$y_1=y_2=y_3$, $x_1<x_2<x_3$，则$x_1+x_2+x_3$的取值范围是(　)

A. $-4<x_1+x_2+x_3<0$　　B. $-3<x_1+x_2+x_3<1$

C. $0<x_1+x_2+x_3<5$　　D. $1<x_1+x_2+x_3<6$

9．已知点$A(x_1, y_1)$，$B(x_2, y_2)$ $(x_1 \neq x_2)$均在函数$y=\frac{1}{x-1}+1$的图象上，则下列结论：①若$x_1+x_2=0$，则$y_1+y_2=0$；②若$x_1+x_2=2$，则$y_1+y_2=2$③若$x_2>x_1>1$，则$(x_2-x_1)(y_2-y_1)>0$;④若$x_2<x_1<0$，则$(x_2-x_1)(y_2-y_1)<0$其中正确的个数是（　）

A.1个　　B.2个　　C.3个　　D. 4个

10．阅读：已知对于任意正整数n，都有$a_n=n(n+1)$，求$\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_{100}}$的值.

小郭通过思考发现可以这样解答：$\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_{100}}=\frac{1}{1\times2}+\frac{1}{2\times3}+\cdots+\frac{1}{100\times101}=$

$(1-\frac{1}{2})+(\frac{1}{2}-\frac{1}{3})+\cdots+(\frac{1}{100}-\frac{1}{101})=\frac{100}{101}$. 若对于任意正整数n，都有$a_1+a_2+\cdots+a_n=n^3$，则$\frac{1}{a_2-1}+\frac{1}{a_3-1}+\cdots+\frac{1}{a_{2025}-1}=$()

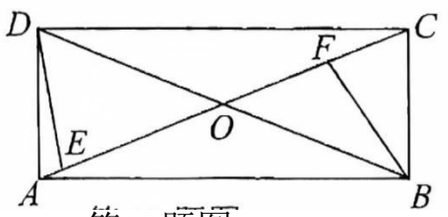
A. $\frac{2023}{2024}$　　B. $\frac{2024}{2025}$　　C. $\frac{2023}{6072}$　　D. $\frac{2024}{6075}$

二、填空题：本题共5小题，每小题5分，共25分．请将答案填在答题卡中对应题号的横线上.

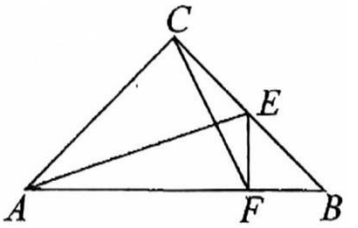
11．若$\sqrt{12n}$是整数，则正整数n的最小值是_____

12．某天，小赵准备给甲乙丙丁四个同学分别打一个电话，打电话的顺序是任意的，则恰好第一个电话打给乙，第二个电话打给甲的概率为_____

13．如左下图，矩形ABCD的对角线AC, BD相交于点O，点E, F分别是线段OA, OC上的点. 若DE=BF　AD=6，AE=1　$CF=\frac{7}{2}$，则DE的长为_____



第13题图



第14题图

14．如右上图，在等腰直角三角形ABC中， AC=BC=2，E为BC的中点，AB 上有一点F，若∠CFE=∠CAE，则ΔCFE的面积等于_____

15．阅读：求方程$x^2+2x-8=0$的正整数解. 小张在解决此问题时从多个角度进行了思考，得到了多种解法，其中一种解法是：将方程化为$x^2=-2x+8(*)$可知x为偶数，令x=2y（y为正整数）代入（*）得$y^2=-y+2$，即y(y+1)=2，由y为正整数可知y=1，所以，原方程的正整数解为x=2. 请你在下列两个问题中任选一个作答. 问题①：方程$x^3+4x^2-96x+256=0$的正整数解是_____；问题②：方程$3x^2+5y^2=288$的正整数解是_____.（注意：如果你解答了两个问题，则按照第一个问题的解答评分）

三、解答题：本题共5小题，共65分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

16.（本小题满分12分）

（1）若$x=\frac{a}{a^2-1}\neq 0$，化简$\frac{x^2}{ax-1}-\frac{x}{a}$

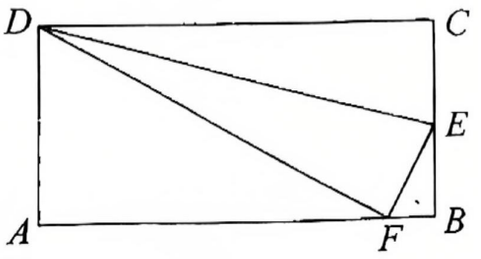
（2）解方程组：$\begin{cases}x+2y-3z=4\\2x+3y-z=2\\3x+y-2z=6\end{cases}$

17.（本小题满分12分）

已知矩形ABCD, AB=8, AD=4，BC边上有一动点E，连接DE，将ΔDCE沿直线DE翻折，点C恰好落在AB边上的点F处.

（1）求tan/CDE的值；

（2）若半径为1的ΘO在四边形CDFE内（包括边界）任意移动，则ΘO 能够到达的区域的面积是多少？（第（2）问只需要写出结果，不要过程）



18.（本小题满分12分）

（1）已知a, b, c为整数，且c≠0，若多项式x^3+ax^2+bx+c能被多项式x^2+2x-3整除，求$\frac{3a+2b}{c}$的值.

（2）证明：两个不能被3整除的整数的平方差能被3整除.

19.（本小题满分14分）

如图1，已知△ABC，过点A作圆切BC于C，再过点B作圆切AC于C,两圆除C外的交点记为D.

（1）证明：$\frac{CD}{AD}=\frac{CB}{AC}$;

（2）如图2，若点P在AB上，过P作PE//AC交BC于E，过P作PF//BC 交AC于F,，证明：四点C, D, E, F共圆.

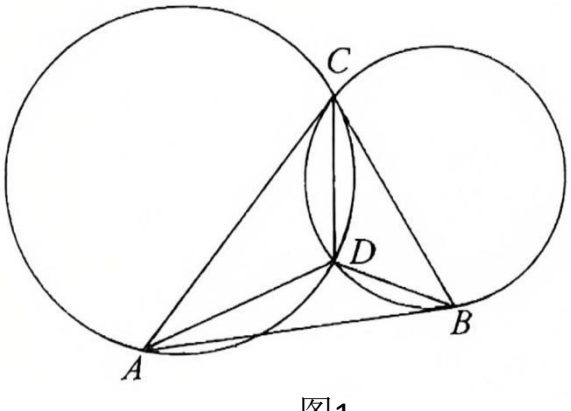


图1

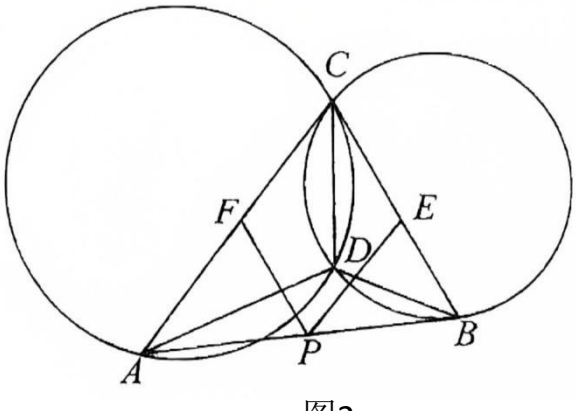


图2

20.（本小题满分15分）

如图1，已知抛物线E：$y=\frac{1}{4}x^2$，将抛物线E向下平移1个单位长度后得到抛物线F，记抛物线F的顶点为P，坐标原点O关于P点的对称点为Q，过点Q且平行x轴的直线记为l，抛物线F上有一动点A（A位于y轴的左边），连接AO并延长交抛物线F于点B，过点B作BC平行y轴交AP的延长线于C 点.

（1）证明：C点在直线l上；

（2）过A点作AD垂直l，垂足为D，证明： ΔAOD是等腰三角形；

（3）如图2，已知线段MN的端点M、N均在抛物线F上，且MN=6，线段MN的中点为G，当线段GC的长最小时，求A点的坐标.

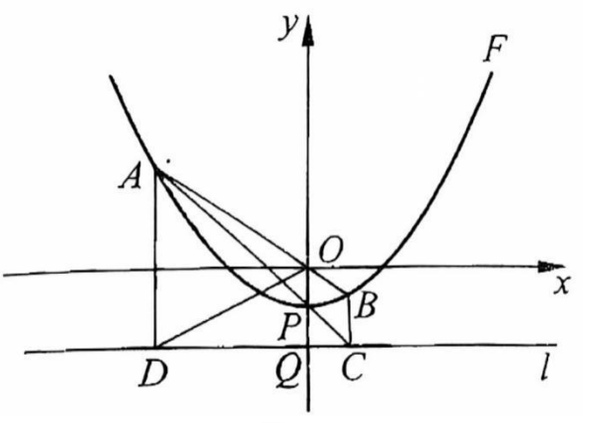


图1

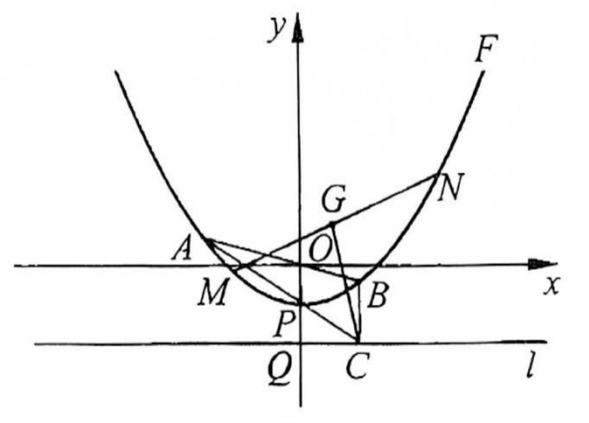


图2